BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
*№3* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2015*

**УДК 517.9**

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ

**А.И.АГАМАЛИЕВА, К.Б.МАНСИМОВ**
***Бакинский Государственный Университет***
***mansimov@front.ru***
***agamaliyeva88@gmail.com***

*В работе рассматривается один класс линейных уравнений в приложениях моделирующий динамику популяций. Получено представление решения.*

**Ключевые слова:** динамики популяций, линейное уравнение, интегро-дифференциальные уравнения, интегральное представление решения.

Как отмечено, например в [1-3] многие модели связанные с динамикой популяций учитывающие конкуренцию за ресурсы среды обитания между особями с различными адаптивными характеристиками, описываются уравнениями вида

$$z_t(t,x) = f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right),\ \ t_0 \le t \le T,\ x_0 \le x \le X, \tag{1}$$

$$z(t_0,x) = a(x), \qquad x_0 \le x \le X, \tag{2}$$

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} g\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)dx\,. \tag{3}$$

В работах [1-3] и др. изучены ряд задач оптимального управления связанные изучением изменения динамики популяций описываемые уравнениями вида (1)-(3) и установлены необходимые условия оптимальности первого порядка, предложены ряд численных алгоритмов на основе полученных необходимых условий оптимальности.

Но подобные задачи оптимального управления еще мало исследованы. Для изучения различных задач оптимального управления, особенно в случае линейности уравнений, описываемый изучаемый процесс, очень часто используют представление решений соответствующих линейных уравнений при помощи аналогов матрицы Коши или же Грина.

Исходя из вышесказанных, в статье рассматривается один класс линейных интегро-дифференциальных уравнений. Получено интегральное представление решения.

**1.** Рассмотрим систему уравнений

$$z_t(t,x)=A(t,x)z(t,x)+B(t,x)y(t,x)+f(t,x),$$

$$(t,x)\in D=\{t_0\le t\le T;\ x_0\le x\le X\}, \tag{4}$$

$$z(t_0,x)=a(x),\qquad x\in[x_0,X], \tag{5}$$

$$y(t,x)=\int_{x_0}^{x_1}[C(t,x,s)z(t,s)+g(t,x,s)]ds\,. \tag{6}$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x,s)$ – заданные $(n\times n)$ матричные функции, непрерывные по совокупности переменных, $f(t,x)$ и $g(t,x,s)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных $n$-мерные вектор-функции, $a(x)$ – заданная $n$-мерная непрерывная вектор-функция.

Найдем представление решения задачи (4)-(6).

**2.** Интерпретируя уравнение (4) как линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение по аргументу $t$ на основе формулы об интегральном представлении решений таких уравнений (см. напр. [4-6]) получим

$$z(t,x)=F(t,t_0,x)a(x)+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)B(\tau,x)y(\tau,x)d\tau+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau\,.$$

Из (3) ясно, что

$$y(\tau,x)=\int_{x_0}^{x_1}[C(\tau,x,s)z(\tau,s)+g(\tau,x,s)]ds\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}z(t,x)=&\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}F(t,\tau,x)B(\tau,x)C(\tau,x,s)z(\tau,s)ds\,d\tau+\\&+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}F(t,\tau,x)B(\tau,x)g(\tau,x,s)ds\,d\tau+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau+F(t,t_0,x)a(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначения

$$Q(t,x;\tau,s)=F(t,\tau,x)B(\tau,x)C(\tau,x,s),$$

$$\ell(t,x)=F(t,t_0,x)a(x)+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)f(\tau,x)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}F(t,\tau,x)B(\tau,x)g(\tau,x,s)ds\,d\tau. \tag{8}$$

Тогда (7) принимает вид

$$z(t,x)=\ell(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}Q(t,x,\tau,s)z(\tau,s)ds\,d\tau. \tag{9}$$

Таким образом, доказали, что $z(t,x)$ является решением интегрального уравнения (9).

В свою очередь, решение уравнения (9) допускает представление

$$z(t,x)=\ell(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)\ell(\tau,s)ds\,d\tau. \tag{10}$$

Здесь $R(t,x,\tau,s)$ $(n\times n)$ матричная функция, являющаяся решением уравнения

$$R(t,x,\tau,s)=Q(t,x,\tau,s)+\int_{\tau}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\alpha,\beta)Q(\alpha,\beta,\tau,s)d\alpha\,d\beta.$$

Используя формулу для $\ell(t,x)$ преобразуем выражение

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)\ell(\tau,s)ds\,d\tau.$$

Имеем

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)\ell(\tau,s)ds\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)\Bigg[F(\tau,t_0,s)a(s)+$$
$$\left.+\int_{t_0}^{\tau}F(\tau,\alpha,s)f(\alpha,s)d\alpha+\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{x_1}F(t,\alpha,s)B(\alpha,s)g(\alpha,s,\beta)d\alpha\,d\beta\right]ds\,d\tau=$$
$$=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)F(\tau,t_0,s)a(s)ds\,d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{\tau}R(t,x,\tau,s)F(\tau,\alpha,s)f(\alpha,s)d\alpha\right]ds\,d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)F(t,\alpha,s)B(\alpha,s)g(\alpha,s,\beta)d\alpha\,d\beta\right]ds\,d\tau. \tag{11}$$

Далее используя теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{t_0}^{\tau}R(t,x,\tau,s)F(\tau,\alpha,s)\,f(\alpha,s)d\alpha\right]ds\,d\tau =$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\tau}^{t}R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)\,f(\tau,s)d\alpha\right]ds\,d\tau\ . \tag{12}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)F(t,\alpha,s)B(\alpha,s)g(\alpha,s,\beta)d\alpha\,d\beta\right]ds\,d\tau =$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\alpha\,d\beta\right]d\tau\,ds. \tag{13}$$

Учитывая тождества (11)-(19) в представлении (10) получим, что

$$z(t,x)=F(t,t_0,x)a(x)+\int\limits_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\,f(\tau,x)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}F(t,\tau,x)B(\tau,x)g(\tau,x,s)ds\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}R(t,x,\tau,s)F(\tau,t_0,s)a(s)ds\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\tau}^{t}R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)\,f(\tau,s)d\alpha\right]ds\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}R(t,x,\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\alpha\,d\beta\right]d\tau\,ds. \tag{14}$$

Из (14) ясно, что

$$z(t,s)=F(t,t_0,s)a(s)+\int\limits_{t_0}^{t}F(t,\tau,s)\,f(\tau,s)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}F(t,\tau,s)B(\tau,s)g(\tau,s,\beta)d\tau\,d\beta+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}R(t,s,\tau,\beta)F(\tau,t_0,\beta)\times$$
$$\times a(\beta)d\beta\,d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\tau}^{t}R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)\,f(\tau,\beta)d\alpha\right]d\beta\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)B(\tau,\beta)g(\tau,\beta,\gamma)d\alpha\,d\gamma\right]d\tau\,d\beta.$$

Поэтому из (6) получаем, что

$$y(t,x)=\int_{x_0}^{x_1} g(t,x,s)ds+\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)F(t,t_0,s)a(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)F(t,\tau,s)\,f(\tau,s)d\tau+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)F(t,\tau,s)B(\tau,s)\times+$$

$$\times g(\tau,s,\beta)d\tau\,d\beta\,ds+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x,s)R(t,s,\tau,\beta)a(\beta)d\beta\,d\tau\,ds+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t} C(t,x,s)R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)\,f(\tau,\beta)d\alpha\right]d\beta\,d\tau\,ds+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t} C(t,x,s)R(t,s,\alpha,\beta)F(\alpha,\tau,\beta)B(\tau,\beta)g(\tau,\beta,\gamma)d\alpha\right]d\gamma\,d\tau\,d\beta. \qquad (15)$$

Таким образом, доказали, что решение $(z(t,x),y(t,x))$ задачи (3)-(6) допускает представление в виде (15).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Букина А.В., Букин С.С. Исследование модели динамики популяций методами теории оптимального управления // Изв. Иркутского ун-та. Сер. Математика. 2010, № 3, с. 59-66.
2. Букина А.В. Идентификация модели видообразования методами теории оптимального управления // Журнал Сибирского Федерального университета. Серия математики и физики. 2008, № 3, с. 291-295.
3. Букина А.В. Оптимизация интегро-дифференциальных систем // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2010, 21с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 256 с.
5. Алексеев В.М., Тихимиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 756 с.
6. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: ЛГУ, 1968, 180 с.


## BİR SİNİF TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA


**A.İ.AĞAMALIYEVA, K.B.MƏNSİMOV**


### XÜLASƏ


Məqalədə populyasiyanın dinamikasını modelləşdirən bir sinif tənliklər sisteminin xətti analoquna baxılır. Müəyyən şərtlər daxilində həllin inteqral göstərilişi tapılır.



**Açar sözlər:** populyasiyanın dinamikası, xətti tənlik, inteqro-diferensial tənlik, həllin inteqral göstərilişi.

## ON THE REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF A CLASS OF EQUATIONS

**A.I. AGHAMALIYEVA, K.B.MANSİMOV**

**SUMMARY**

The paper considers linear analogs of a class of equation systems modeling the dynamics of populations. Under certain conditions, integral representation of the solution is obtained.

**Key words:** population dynamics, linear equation, integro-differential equation, integral representation of the solution.

*Поступила в редакцию: 11.06.2015 г.*
*Подписано к печати: 17.11.2015 г.*